1.代数的集合

多项式的根/解。代数几何的起始点是对于代数集合的研究，这指的是代数方程式系统的解（*der Lösungsgebilde von algebraischen Gleichungssystemen*，为方程亦可）。更加准确的阐述如下：我们观察一个多项式 $f(z_1,...,z_n)$ 在n个变量（*Variablen*）之中$z_1,...,z_n$。我们称呼一个形为$f(z_1,...,z_n)=$数方程。一个系统这样的方程，譬如

$$(1.1) \qquad f_i(z_1,...z_n)=0(i\in A)$$

（A表示的是一个任何的指标集/索引集[**eine beliebige Indexmenge**],f_i总是一个多项式）人们称呼这个为一个代数方程系统（*algebraisches Gleichungsy*系统(1.1)的解集（*Lösungsmenge*）或者解（*Lösungsgebilde*）写作$V(\{f_i|i\in A\})$,同样记做

$$(1.2) \qquad V(\{f_i|i\in A\})=\{(c_1,...,c_n)|f_i(c_1,...,c_n)=0,\forall i\in A\}$$

$V(\{f_i|i\in A\})$被称为$\{f_i|i\in A\}$零点解/根集或者零点解/根。最后出现的很多多项式，我们标记为

$$(1.2)' \qquad V(f_1,...,f_n):=V(\{f_i|i=1,...,n\})$$

(1.3)**意见/评论：**

A):众所周知线性代数的起点是线性方程系统的解的研究。正是一个如同（1.1）这样的系统，其中所有的多项式f_i来自次数为1（这边翻译存疑，原文如sich dabei genau um solche System(1.1),bei denen alle Polynome f_i vom Grad 1 sind.）这些系统的解释仿射空间（*affine Räume*）并且将会可以被用来备的线性代数。

对于所有在代数中的等式系统的关系会在本质上变得更加复杂。特别是有其他的线性情况——没有方法能够明确的去确定方程的解。这种情况下，定量的算法）涉及到了非线性的情况的解的定量研究，这种情况导致了不同的分类。

B）代数的一个非常重要的目标就是去研究代数等式/方程组$f(z)=0$，在有唯一变量z的情况下。代数有（还是有可能性的，也就是f的次数是$\leqslant 4$的）确方法。数值计算（die Numerik）算是一种方法，来得到我们提前预设决定好精确度的代数方程式的解。这两点在代数几何中都不是很重要，因为它只对整的陈述感兴趣。一个对于代数几何非常重要的问题就是关于一个确定解的多重性。这些问题显然针对上面所述的观点和数值计算的意义的。所以譬如数值法的趋同现象的行为（个人认为“收敛”更好一些，原文Konvergenzverhalten）对于多解和简单解是不同的。

读书笔记和讲解：

1.指标集（Indexmenge）

1):指标集：指标集对于实变 函数 是非常重要的。设一集合为I，若对于每个$a \in I$，都对应了一个集合Aa，则由这些Aa的全体构成的集合A称之为集合族
的指标集。

如n ∈N，则定义Qn={x| x∈N,<n}，则集合族为{Qn| n∈N}，其指标集为N。即，在N中任取一个n，都可以得到一个集合Qn，那么这些Qn的集合称之为集
是帮助集合A索引标定所生成的集合。

实变函数：就是以实数作为自变量的函数，如$y = x^2(x \in \mathbb{R})$

2.数值计算（Numerik）

由于阿贝尔-鲁菲尼定理，在四次以上次数的方程并没有求根公式，也就是说，只有一到四次方程才有求根公式，而对于四次以上方程的求解一般使用数值
近似的解，其中较为出名的方法是牛顿迭代法。

1):牛顿迭代法(Newton's method)

由于多数方程（5次及以上）没有求根公式，很难求出精确解，甚至无解，才有这个牛顿迭代法，牛顿你迭代法使用$f(x)$的泰勒级数的前几项来寻找$f(x)$

该方法有很大的优点，方程在$f(x) = 0$的单根附近具有平方收敛性，此时线性收敛，但通过一些方法可以变成超线性收敛。

2):线性收敛

对于收敛点列$x_k \to x^*$，如果其Q因子Q_1，满足$0 < Q_1 < 1$，则称x_k是Q线性收敛于x^*，如果$Q_1 \geqslant 1$，则称x_k是Q次收敛于x^*

如果收敛点列的x_k的R因子R_1，满足$0 < R_1 < 1$，则称x_k是R线性收敛于x^*，如果$R_1 = 1$则称x_k是R次线性收敛

一个点列如果Q线性收敛就一定R线性收敛，但反之不然。

一般线性收敛指的是Q线性收敛，Q线性收敛等价于：

$$\lim_{k\to\infty} sup\frac{||x_{k+1}-x^*||}{||x_k-x^*||} < 1$$

3):超线性收敛

对于收敛点列$x_k \to x^*$，如果其Q因子Q_1，满足$Q_1=0$，则称x_k是Q超线性收敛于x^*，如果其R因子R_1满足$R_1=0$，则称x_k是超线性收敛于x^*

一个点列如果Q超线性收敛就一定R超线性收敛，但反之不然。

一般线性收敛指的是Q超线性收敛，Q超线性收敛等价于：

$$\lim_{k\to\infty} sup\frac{||x_{k+1}-x^*||}{||x_k-x^*||} = 0$$

4):收敛因子

通俗点来说就是，为改变收敛速度而乘上去的函数。

在玉林师范学学院学报（自然科学）2018年第39卷第2期的《收敛因子在无穷积分计算中的运用》我找到了一下定义

> 定义1 为了改变无穷积分的收敛性，在被积函数中乘上一个函数，称这个函数为收敛银子.
> 定义2 在无穷积分中引入一个收敛银子，使含有参量的无穷积分满足积分号下可求导，交换积分的条件，进而求解无穷积分的方法称为收敛因子法.

5):Q和R线性收敛和超线性收敛

Q和R线性收敛和超线性收敛，实际上和是四个概念

	Q-收敛因子	R-收敛因子
线性收敛	Q线性收敛	R线性收敛
超线性收敛	Q超线性收敛	R超线性收敛

貌似百度上并没有关于Q和R线性收敛和超线性收敛的词条，所以我在《同济大学学报》1998年2月第26卷第1期上找到了《R收敛因子与Q收敛因子的关系
R和Q收敛因子的阐述

> **定义1** 对于实数$p \in [1, +\infty)$,称
>
> $$\lim_{k\to\infty} sup\frac{r_{k+1}}{r_k^p}$$
>
> 为序列$\{X_k\}$的比值收敛因子，也称为Q-收敛因子
> 当p固定时，Q_p越小，则$r_k \to 0$越快.
>
> ---
>
> **定义2** 对于实数$p \in [1, +\infty)$,称
>
> $$R_p = \begin{cases} lim_{k\to\infty} sup r_k^{1/k}, if p = 1 \\ lim_{k\to\infty} sup r_k^{1/p^k}, if p > 1 \end{cases}$$
>
> 为序列$\{X_k\}$的根收敛因子，也称为R-收敛因子.
> 如果$\{X_k\}$收敛于X^*，则当k充分大的时，总有$r_k = ||X_k - X^*|| < 1$,所以总有$0 \leqslant R_p \leqslant 1$
>
> ---
>
> **定义3** 如果$Q_1 = 0$，则称$\{X_k\}$为Q-超线性收敛于X^*，如果$0 < Q_1 < 1$，则称$\{X_k\}$为Q-线性收敛于X^*，如果$Q_1 = 1$，则称$\{X_k\}$为Q-次收敛于
>
> ---
>
> **定义4** 如果$R_1 = 0$，则称$\{X_k\}$为R-超线性收敛于X^*，如果$0 < R_1 < 1$，则称$\{X_k\}$为 R-线性收敛于X^*，如果$R_1 = 1$，则称$\{X_k\}$为R-次收敛于

实际上他们的不同在于计算方式上的不同

总结:

可能确实拓展的有一点多了，有一些杂碎了，不过我认为多了解一些总归是好的

资料来源：
指标集_百度百科
超线性收敛_百度百科
收敛速度_百度百科

《R收敛因子与Q收敛因子的关系》，钱仲范，《同济大学学报》1998年2月第26卷第1期
《收敛因子在无穷积分计算中的运用》，梁志清，农海娇，严晓婷，叶玲伶，庞敏，玉林师范学学院学报（自然科学）2018年第39卷第2期